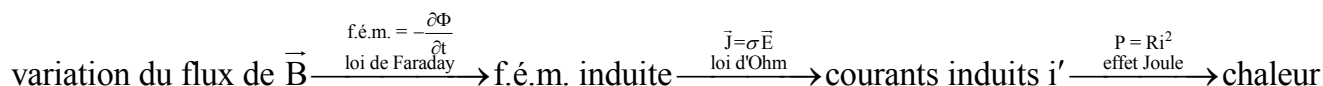


Physique Générale III, séance 13

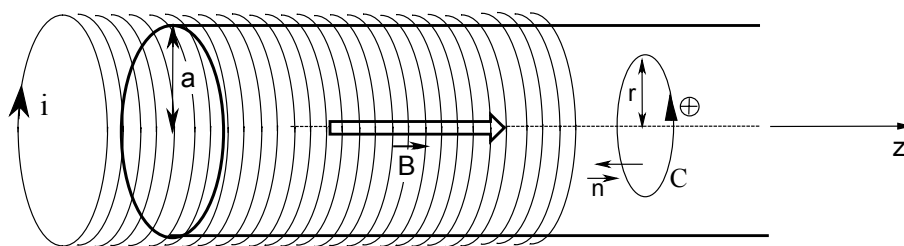
Exercice 1 : Courants dans un four à induction : courants de Foucault et loi d'Ohm

- a) Le courant variable i génère un champ magnétique variable $\vec{B}$ dans le barreau, d'où un flux variable dans le temps, d'où une force électromotrice, d'où la création de courants induits (les courants de Foucault), d'où la dissipation de chaleur dans le barreau par effet Joule :



Remarque : Ces courants de Foucault i' génèrent à leur tour un champ magnétique $\vec{B}'$ que l'on négligera devant $\vec{B}$. Cette approximation est valable tant que la pulsation ω de i (et $\vec{B}$) n'est pas trop élevée. En effet, l'intensité de $\vec{B}'$ est proportionnelle à la dérivée $\frac{\partial B}{\partial t}$: une fréquence élevée du champ $\vec{B}$ signifie des variations rapides, donc des valeurs élevées de la dérivée.

On considère au sein du barreau un anneau de conducteur C , de rayon r ($0 < r < a$), centré sur l'axe z et orienté comme indiqué sur le schéma ci-dessous :



Le champ généré par le solénoïde est uniforme dans tout le barreau et égale à :

$$\vec{B} = n\mu_0 I_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

Le flux Φ du champ $\vec{B}$ à travers la surface du contour C est donc variable dans le temps :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = -BS = -n\mu_0 I_0 \sin(\omega t) \pi r^2$$

C'est pourquoi une f.é.m. e est créée : $e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ (**loi de Faraday**). D'après la **loi**

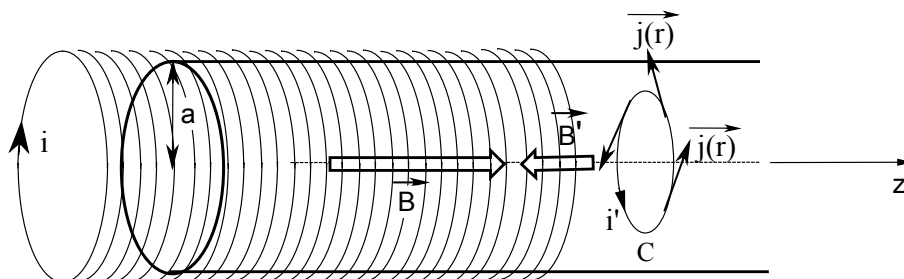
d'Ohm, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, on peut aussi écrire :

$$e = \oint_C \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (1)$$

Pour déterminer la circulation de $\vec{J}$ le long du contour C , il nous faut connaître sa direction et les variables dont elle dépend. Le champ $\vec{B}$, cause de $\vec{J}$, est invariant par translation le long de z et par rotation autour de l'axe z . Par conséquent $\vec{J}$ ne dépend que de r : $\vec{J}(r)$. En outre, d'après la **loi de Lenz**, la densité de courant $\vec{J}(r)$ induite par les variations de $\vec{B}$ doit générer

Physique Générale III, séance 13

un champ $\vec{B}'$ qui s'oppose à $\vec{B}$. On peut donc dire du champ $\vec{B}'$ qu'il est axial, comme $\vec{B}$, mais de sens opposé. Pour **générer un champ axial**, il nous faut une **densité de courant orthoradiale**. C'est pourquoi $\vec{j}(r)$ est orthoradiale : $j(r)\vec{e}_\theta$.



On est donc en mesure de calculer la circulation de $\vec{j}$ le long de C :

$$\vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_0^0 j(r) \cdot d\vec{l} \, r \, d\theta = j(r) r \, d\theta, \text{ d'où : } e = \frac{1}{\sigma} \oint_C \vec{j} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\pi} j(r) r \, d\theta = \frac{2\pi r}{\sigma} j(r). \quad (2)$$

En ce qui concerne la dérivée du flux :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (-n\mu_0 I_0 \sin(\omega t) \pi r^2) = n\mu_0 I_0 \pi r^2 \omega \cos(\omega t) \quad (3)$$

La relation (1) s'écrit donc finalement : $\frac{2\pi r}{\sigma} j(r) = n\mu_0 I_0 \pi r^2 \omega \cos(\omega t)$. On en conclut :

$$j(r) = +\frac{1}{2} \sigma n\mu_0 I_0 \omega r \cos(\omega t) = j_0 r \cos(\omega t) \quad (4)$$

Remarques :

1. On remarque que l'intensité maximale $j_0 = \frac{1}{2} \sigma n\mu_0 I_0 \omega$ est proportionnelle à la fréquence de variation de i .
2. Ne pas oublier de vérifier le signe de la densité $j(r)$ après l'avoir calculée : elle doit générer un champ $\vec{B}'$ dans le sens de $-z$. C'est pourquoi on s'attend à ce que i' (et donc $\vec{j}$) soit orienté dans le même sens que l'orientation arbitraire choisie initialement pour C. Il est donc logique d'obtenir un signe + dans l'expression (4).

Application numérique :

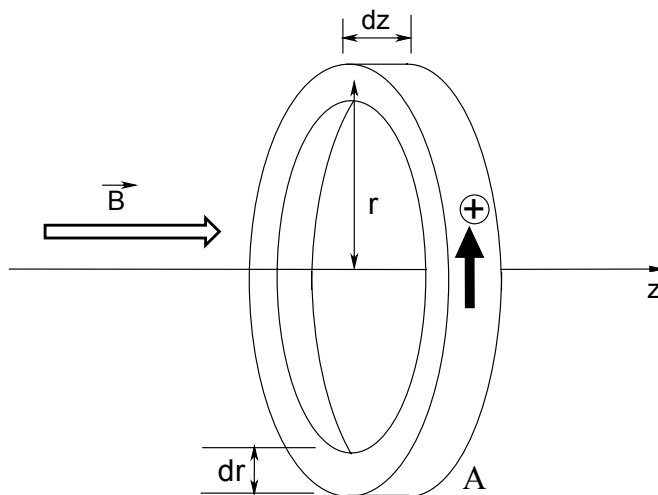
$$j(r) = 19,7 \cdot 10^6 r \cos(100\pi t) \, \text{A.m}^{-2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} j \text{ en A.m}^{-2} \\ r \text{ en m} \\ t \text{ en s} \end{cases}$$

- b) Déterminons la puissance dissipée dans un anneau A, de rayon r et centré sur l'axe z . Sa largeur est dr et son épaisseur dz . La puissance dissipée par effet Joule dans cet anneau est :

$$d^2 P = \frac{e^2}{d^2 R}, \text{ où } e \text{ est la f.é.m. induite dans A, et } d^2 R \text{ est la résistance de A :}$$

Physique Générale III, séance 13

- e est déjà connue : $e = \frac{2\pi r}{\sigma} j(r)$;
- d^2R est la résistance d'un élément cylindrique, de section $dr.dz$ et de longueur $2\pi r$, soit : $d^2R = \frac{1}{\sigma} \frac{\text{longueur}}{\text{section}} = \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi r}{dr dz}$



On en conclut : $d^2P = \frac{4\pi^2 r^2 j(r)^2}{\sigma^2} \frac{\sigma}{2\pi r} dz dr = \frac{2\pi}{\sigma} j_0^2 \cos^2(\omega t) r^3 dr dz$.

On fait la somme des d^2P en intégrant suivant r et suivant z :

$$P = \int d^2P = \frac{2\pi}{\sigma} j_0^2 \cos^2(\omega t) \int_0^a r^3 dr \underbrace{\int_0^1 dz}_{\text{pour avoir la puissance par unité de longueur}}$$

$$P = \frac{2\pi}{\sigma} j_0^2 \cos^2(\omega t) \frac{a^4}{4} = \frac{1}{8} \pi \sigma \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 a^4 \cos^2(\omega t) \rightarrow \text{puissance instantanée}$$

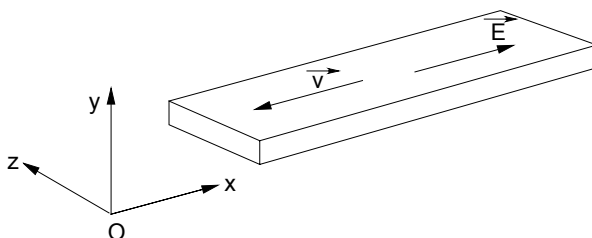
La puissance moyenne par unité de longueur est donc :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{8} \pi \sigma \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 a^4 \langle \cos^2(\omega t) \rangle$$

Or $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, d'où : $\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{16} \pi \sigma \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 a^4}$.

Application numérique : $\langle P \rangle = 306 \text{ mW.m}^{-1}$

Exercice 2 : Modèle de Drude de la conductivité et effet Hall



Physique Générale III, séance 13

a) La force de Lorentz s'exerçant sur une charge q de vitesse $\vec{v}$ soumise aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}$.

A $t = 0$ $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$, donc $\vec{F} = \vec{0}$ et la distribution des $\vec{v}$ ne change pas : $\vec{v} = \vec{v}_0$.

Puis le champ électrique prend la valeur $\vec{E}$: $\vec{F} = q\vec{E}$. D'où : $m\vec{a} = q\vec{E}$, $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$. En

intégrant : $\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0$. En faisant la moyenne sur les électrons en mouvement (électrons

de conduction) : $\langle \vec{v} \rangle = \frac{q}{m}\vec{E}t + \langle \vec{v}_0 \rangle$. Avant application du champ $\vec{E}$, les électrons ne

possèdent pas de mouvement globalement ordonné : $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$. On en conclut :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{q}{m}\vec{E}t$$

On en déduit la densité de courant : $\vec{j} = nq\langle \vec{v} \rangle = \frac{nq^2}{m}\vec{E}t$, où n est la densité volumique des porteurs de charge q (des électrons dans ce cas de figure, $q = -e$). Cette **dernière expression montre clairement qu'il n'y a pas d'état stationnaire** : $\vec{j}$ diverge lorsque le temps t tend vers l'infini.

Or l'expérience montre clairement l'existence d'un état stationnaire, rapidement atteint, où $\vec{j}$ est proportionnel à $\vec{E}$: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

b) Une force de frottement visqueux (c'est-à-dire proportionnelle à la vitesse) est à ajouter dans le bilan des forces : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$, d'où : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E} - \frac{1}{\tau}\vec{v}$. La grandeur τ , introduite par Drude, représente en fait le temps moyen entre deux collisions.

En régime stationnaire $\vec{v}$ ne varie plus dans le temps : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, soit : $\frac{q}{m}\vec{E} - \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{0}$. On

peut en conclure : $\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$. Enfin, comme $\vec{j} = nq\vec{v}$, on en déduit $\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$. On a bien

une loi de la forme $\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$, à condition de poser $\boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}}$.

c) Avant $t = 0$: $\vec{E} \neq \vec{0}$, $\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E} = \vec{v}_0$.

Après $t = 0$: $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{F} = m\vec{a} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. On a donc : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\vec{v}$, soit : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{0}$. Cette

équation différentielle admet pour solution : $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$.

Lorsque les frottements augmentent (matériau moins conducteur), la constante de temps τ est plus petite (plus de collisions pour les électrons). La décroissance exponentielle de $\vec{v}$ est alors plus rapide.

d) $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ en régime stationnaire car $\vec{v} = \text{constante}$.

Physique Générale III, séance 13

Le bilan des forces est le suivant :

□ force de frottement visqueux (suivant x) : $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$

□ force électrique : $q\vec{E}$

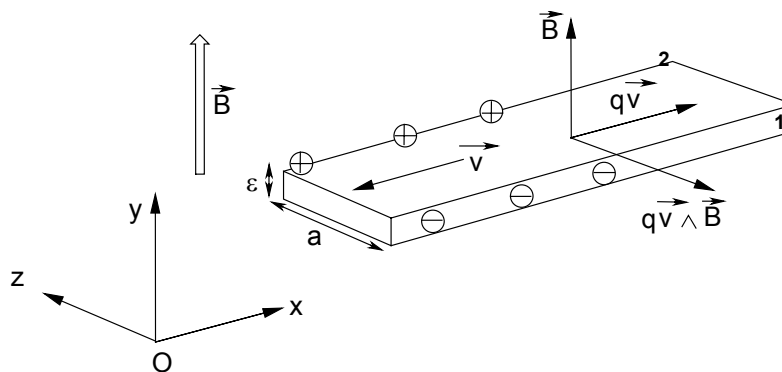
□ force magnétique (suivant z) : $q\vec{v} \wedge \vec{B}$

En projetant ce bilan des forces sur les 3 axes :

$$F_x = qE_x - \frac{m}{\tau} v = 0 \Rightarrow E_x = \frac{mv}{q\tau}$$

$$F_y = qE_y = 0 \Rightarrow E_y = 0$$

$$F_z = qE_z + qvB = 0 \Rightarrow E_z = -vB$$



Remarque : Les électrons étant dirigés par la force de Lorentz dans le sens de $-z$, on a une accumulation d'électrons sur la face 1. Sur la face 2 opposée du ruban apparaît donc un excédent de charges positives pour maintenir l'électroneutralité. Cette dissymétrie fait donc apparaître un champ électrique $\vec{E}_z$ orienté dans le sens des potentiels décroissants, donc de la face 2 vers la face 1. Il est donc logique d'obtenir une projection de E_z qui soit négative.

e) Coefficient de Hall : $R_H = \frac{\|\vec{E}_z\|}{\|\vec{j}\| \|\vec{B}\|}$. On obtient donc : $R_H = \frac{vB}{n|q|vB} = \frac{1}{n|q|}$, avec :

□ n est la densité volumique d'électrons libres ;

□ $|q| = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ est la charge électrique élémentaire.

f) a) La norme du champ électrique suivant z est $\frac{V_H}{a}$ d'une part, mais aussi vB d'autre part

(cf. question d). On en conclut la vitesse de déplacement des électrons libres : $v = \frac{V_H}{aB}$.

Application numérique : $v = 1,26 \text{ mm/s}$ (déplacement très lent des électrons de conduction).

b) $j = \frac{i}{\epsilon a}$ d'une part, et $j = n|q|v$ d'autre part. D'où : $n = \frac{i}{\epsilon a|q|v}$, soit $n = 7,43 \cdot 10^{18}$

électrons/ m^3 .

Comparons ce nombre d'électrons de conduction au nombre d'atomes d'argent (par unité de volume) :

Physique Générale III, séance 13

$$1 \text{ cm}^3 \text{ d'argent} \rightarrow \rho \text{ g d'argent} \rightarrow \frac{\rho}{M_{\text{Ag}}} \text{ moles d'argent} \rightarrow \frac{\rho N_A}{M_{\text{Ag}}} \text{ atomes d'argent.}$$

Ainsi :

$$n' = \frac{\rho N_A}{M_{\text{Ag}}} \text{ atomes/cm}^{-3} = 5,81 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 5,81 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}. \text{ On en conclut :}$$

$$\boxed{\frac{n}{n'} = 1,27}. \text{ Il a en moyenne 1,27 électrons de conduction par atome d'argent.}$$